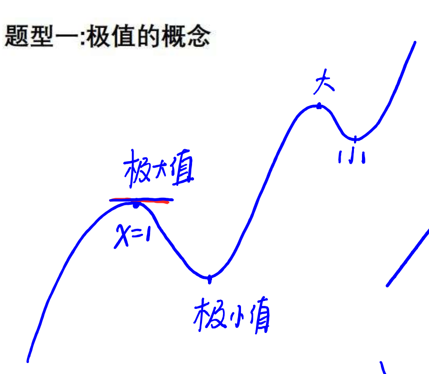
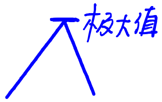
第 4 讲：导数应用之极值最值问题

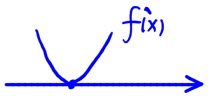
题型一:极值的概念



若f(x)可导,极值点处导数值为0, but.导数值为0不一定是极值.



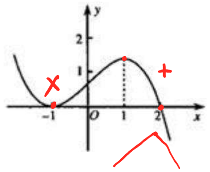
极值点是f'(x)变号零点



x=1是极大值点

极大值 f(1)

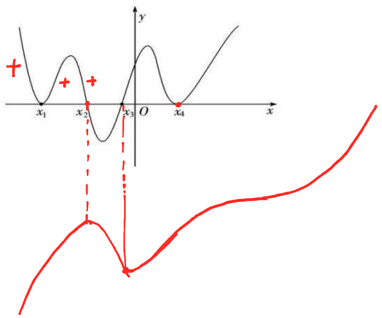
1. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，那么



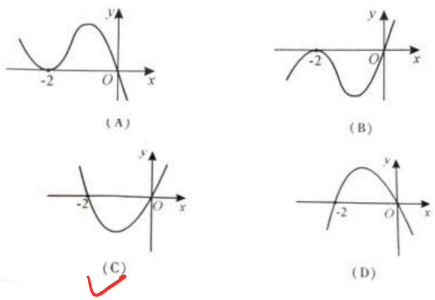
A． -1 是函数 $f(x)$ 的极小值点　B．1 是函数 $f(x)$ 的极大值点

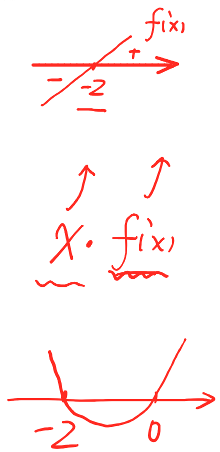
C． 2 是函数 $f(x)$ 的极大值点　D．函数 $f(x)$ 有两个极值点

2.已知函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如下，则 $y=f(x)$ 有__1__ 个极大值点.



3. 设函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极小值，则函数 $y=xf'(x)$ 的图像可能是





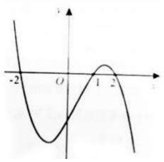
4. 设函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图像如图所示，则下列结论中一定成立的是

(A) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$

(B) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$

(C) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

(D) 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$

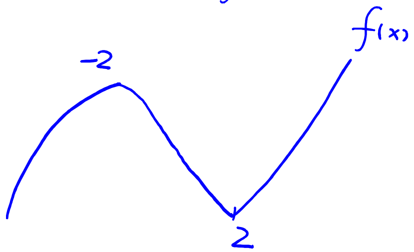


$x\in(-\infty,-2)$ $f'(x)>0$

$x\in(-2,1)$ $f'(x)<0$

$x\in(1,2)$ $f'(x)<0$

$x\in(2,+\infty)$ $f'(x)>0$



5. （2011 浙江文）设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in R)$，若 $x=-1$ 为函数 $f(x)e^x$ 的一个极值点，则下列图象不可能为 $y=f(x)$ 的图象是

$f(x)=ax^2+bx+c$

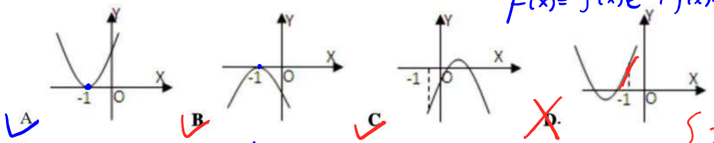
$f'(x)=2ax+b$

$F(x)=f(x)\cdot e^x$

$F'(x)=f'(x)e^x+f(x)\cdot e^x=e^x(f'(x)+f(x))$

极值点处导数值为0

$F'(0)=0$



A: $f'(-1)=0$ + $f(-1)=0$

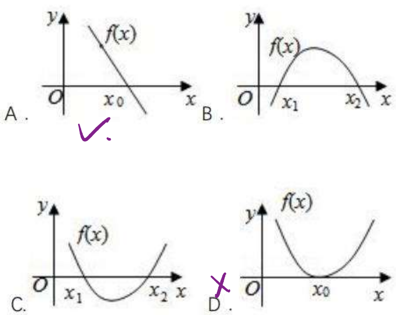
B: $f'(-1)=0$, $f(-1)=0$

C: $f'(-1)>0$, $f(-1)<0$

D: $\begin{cases} f'(-1)>0 \\ f(-1)>0 \end{cases}$

$\boxed{f'(-1)+f(-1)=0}$

6.若函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 有极值，则导函数 $f'(x)$ 的图象不可能是



$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (三次)

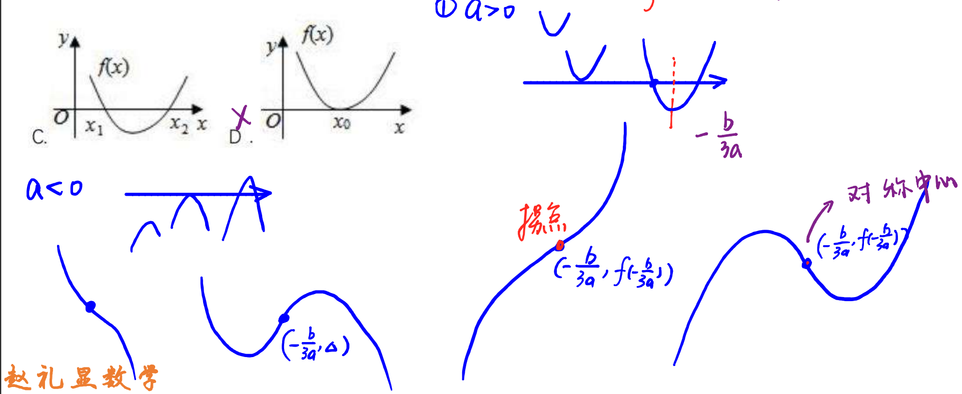
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

① $a>0$

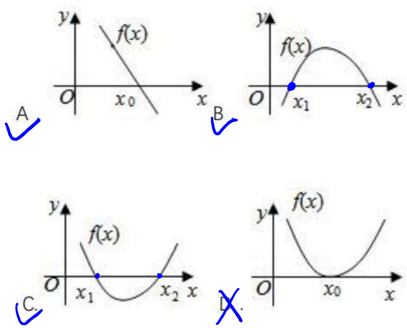
$f''(x_0)=0$ 拐点

$-\frac{b}{3a}$

$a<0$



6.若函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 有极值，则导函数 $f'(x)$ 的图象不可能是



12T

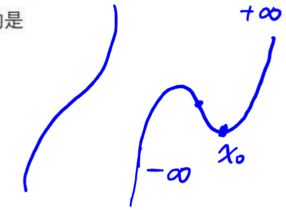
7.（2013全国Ⅱ）已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，下列结论中错误的是

A. $\exists x_0\in R$，$f(x_0)=0$

B. 函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形

C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减

D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$

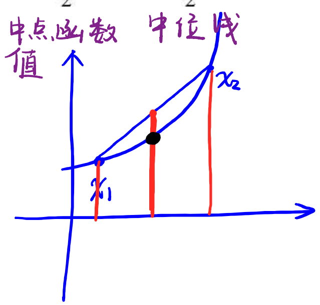


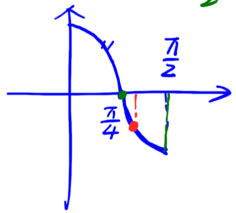
8. 在 $y=2^x$，$y=\log_2 x$，$y=x^2$，$y=\cos 2x$ 四个函数中，当 $0<x_1<x_2<1$，

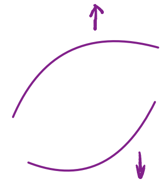
$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数个数________.

$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$　　凸 凹 性

中点函数值　中位线







凹

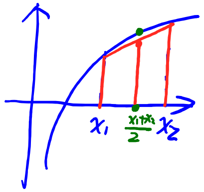
凸

数分 知高

数定义 相仿

$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 凹函数

$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 凸



8. 在 $y=2^x$，$y=\log_2 x$，$y=x^2$，$y=\cos 2x$ 四个函数中，当 $0<x_1<x_2<1$，

$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数个数________.

一定范围，二阶导数 $f''(x)>0$

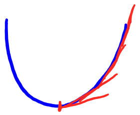
$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$

$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\downarrow$

$f''(x)>0$　$f(x)$在区间上凹　$\rightarrow$

$f''(x)<0$　$f(x)$ 凸

$f(x)=x^2$



$f'(x)\uparrow \Rightarrow f''(x)>0$

$f'(x)=2x$

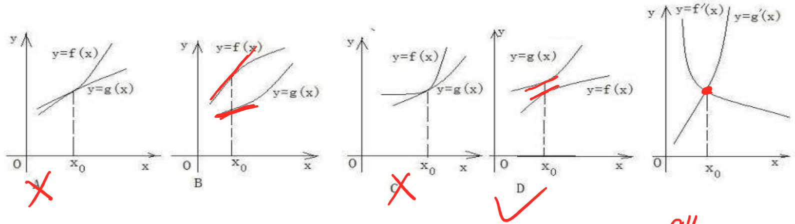
$f''(x)=2>0$

9.已知函数 $y=f(x), y=g(x)$ 的导函数的图象如下图，那么 $y=f(x), y=g(x)$ 图象可能是　D.

导函数看单调性

$f''(x)$

$\rightarrow$ 凹凸性



$g''(x)>0 \Rightarrow g(x)$凹

$f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$凸

10.（2021 全国Ⅰ理）设函数 $f(x)=\ln(a-x)$，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点．

极值点处导数值 $=0$.

(1)求 a；

$g(x)=x\cdot\ln(a-x)$

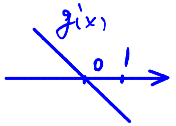
$g'(x)=\ln(a-x)-x\cdot\frac{1}{a-x}$

$g'(0)=\ln a=0$ $\therefore a=1$ $x\in(-\infty,1)$

验证

当 $a=1$ $g'(x)=\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}=\ln(1-x)+\frac{(x-1)+1}{x-1}$

$=\ln(1-x)+\frac{1}{x-1}+1$，显然 $g'(x)$ 在 $(-\infty,1)\downarrow$



又$\because g'(0)=0$ $\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,0)\uparrow$ $(0,1)\downarrow$

$\therefore g(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值．综上 $a=1$

11.（2017 全国Ⅱ）若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为

A. -1 B. $-2e^{-3}$ C. $5e^{-3}$ D. 1

极小 $f(1)=a=-1$.

$f'(x)=(2x+a+x^2+ax-1)e^{x-1}$

$f'(-2)=0$ $-4+a+4-2a-1=0$

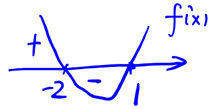
$\therefore a=-1$

$f'(x)=(x^2+x-2)\cdot e^{x-1}$

算出一个答案，小题不验证，大题验证.

算出二个答案，要验证.

$\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{matrix}$



12.已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(b-1)x^2+b^2x$ 在 $x=1$ 处取得极值，求 b 的值.

$f'(1)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=\triangle \\ \text{or} \\ b=\triangle \end{cases}$

$f'(x)=x^2+(b-1)x+b^2$

$f'(1)=1+b-1+b^2=b^2+b=0.$

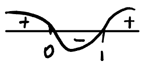
$b(b+1)=0.$

$b_1=0.$

$b_2=-1$

① 若 $b=0$.

$f'(x)=x^2-x$



$f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}.$

② 若 $b=-1$

$f'(x)=x^2-2x+1$

$=(x-1)^2\geq 0.$

$\therefore f(x)$ 单调递增，无极值

$\therefore$ 舍去.

$\therefore b$ 的值为 0.

13.（2013 浙江）设函数 $f(x)=(e^x-1)(x-1)^k$（$k=1,2$）则

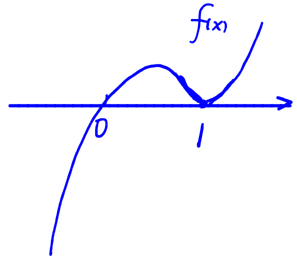
A. 当 $k=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极小值

B. 当 $k=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极大值

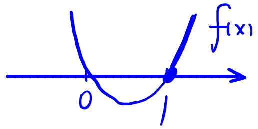
C. 当 $k=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极小值

D. 当 $k=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极大值

$k=2$ 时 $f(x)=(e^x-1)\cdot(x-1)^2$



$k=1.$ $f(x)=(e^x-1)\cdot(x-1)$



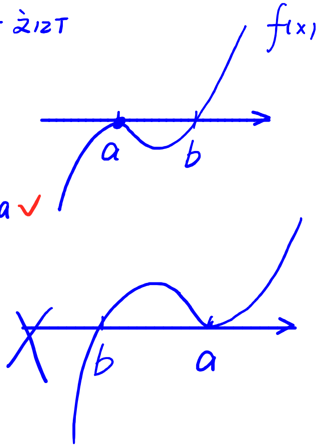
14. （2021 全国Ⅰ）设 $a\neq 0$，若 $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则(　)

A．$a<b$　　B．$a>b$　　C．$ab<a^2$　　D．$ab>a^2$ ✓

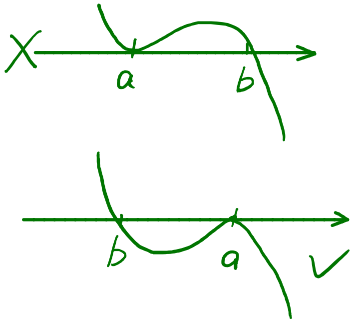
理10T 文12T

$a>0$

$b>a$ ✓



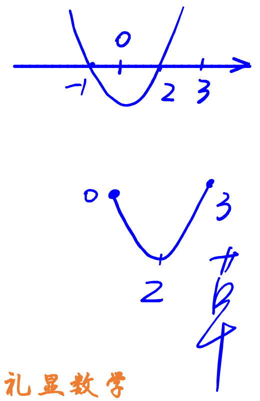
$\boxed{a<0 \quad a>b}$



题型二:最值问题

15.函数 $y=2x^3-3x^2-12x+5$ 在 $[0,3]$ 上的最大值、最小值分别是__________.

$y'=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)$　$\begin{matrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{matrix}$



min $f(2)=16-12-24+5$

max: $\begin{cases} f(0)=5 \\ f(3)=-4 \end{cases} \Rightarrow 5.$

16.（2021 新高考Ⅰ卷）函数 $f(x)=|2x-1|-2\ln x$ 的最小值为________.

1° $x\geq\frac{1}{2}$ 时　$f(x)=2x-1-2\ln x$

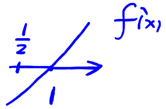
$\ln x\leq x-1$

$f(x)=2x-1-2\ln x$

$\geq 2x-1-2(x-1)$

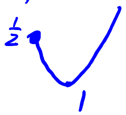
$=1.$

$f'(x)=2-\frac{2}{x}$



$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)\downarrow$ $(1,+\infty)\uparrow$

$f(x)_{min}=f(1)=1.$



2° $0<x<\frac{1}{2}$ 时　$f(x)=1-2x-2\ln x$ ↓

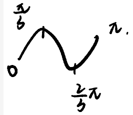
$f(x)>f(\frac{1}{2})$

17.（2020 全国Ⅱ）已知函数 $f(x)=\sin^2 x\sin 2x$. 奇 (2): $f(x+\pi)=[\sin(x+\pi)]^2\sin 2(x+\pi)=f(x)$

（1）讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 的单调性；（2）证明：$|f(x)|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$； ∴ $f(x)$ 的周期为 π

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域即为 $f(x)$ 在 R 上的值域

∵ 由(1)可知



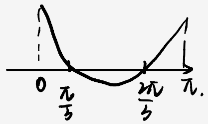
(1) 周期 π.

$f'(x)=2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin 2x+\sin^2 x\cdot 2\cos 2x$

$=4\sin^2 x\cdot\cos^2 x-2\sin^2 x(2\cos^2 x-1)$

$=2\sin^2 x(4\cos^2 x-1)$

$=2\sin^2 x(2\cos x+1)(2\cos x-1)$



令 $f'(x)=0$. $x_1=\frac{\pi}{3}$ $x_2=\frac{2}{3}\pi$

$x\in(0,\frac{\pi}{3})$，$(\frac{2}{3}\pi,\pi)$ 时，$f'(x)>0$. $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ ↑ $(\frac{2\pi}{3},\pi)$ ↓

$x\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ 时，$f'(x)<0$. ∴ $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ ↓

$f(\frac{\pi}{3})=\frac{3}{8}\sqrt{3}$. $f(x)_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$f(\pi)=0$.

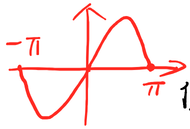
又∵ $f(0)=0$. ∴ $f(-\frac{\pi}{3})=-\frac{3}{8}\sqrt{3}$

值域 $[-\frac{3}{8}\sqrt{3},\frac{3}{8}\sqrt{3}]$

Me

18.（2018 全国Ⅰ）已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则 $f(x)$ 的最小值是______.

16T try $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x$

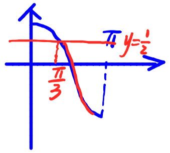


奇函数 $f(x+2\pi)=f(x)$ 周期性 $T=2\pi$.

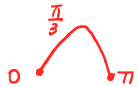
值域 求 $x\in[0,\pi]$

$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2(2\cos^2 x+\cos x-1)$

$=2\cdot(\cos x+1)\cdot(2\cos x-1)$



$(0,\frac{\pi}{3})$ ↑ $(\frac{\pi}{3},\pi)$ ↓



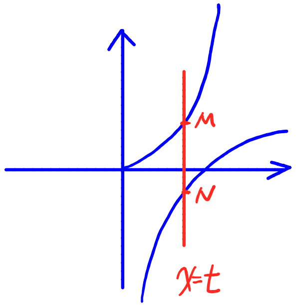
$f(x)_{max}=2\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f(x)_{min}=0$

$f(x)\in[-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}]$

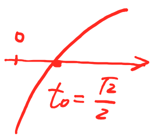
19. 设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=\ln x$ 的图象分别交于点 M,N，则当 $|MN|$ 达到最小时 t 的值为

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



$|MN|=t^2-\ln t=h(t)$

$h'(t)=2t-\frac{1}{t}$



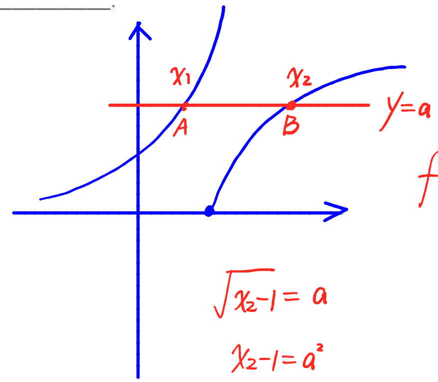
$2t=\frac{1}{t}$

$t^2=\frac{1}{2}$

$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ ↓ $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ ↑

$|MN|_{min}=h(\frac{\sqrt{2}}{2})$

20.已知直线 $y=a$ 分别与函数 $y=e^{x+1}$ 和 $y=\sqrt{x-1}$ 交于 A,B 两点，则 A,B 之间的最小距离是______.

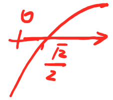


$|AB|=x_2-x_1$

$=(a^2+1)-(\ln a-1)$

$f(a)=a^2-\ln a+2$

$f'(a)=2a-\frac{1}{a}$



$\sqrt{x_2-1}=a$

$x_2-1=a^2$

$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ ↓ $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ ↑

$e^{x_1+1}=a$

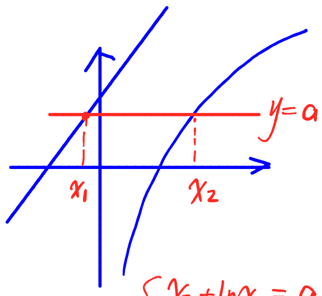
$x_1+1=\ln a$

$|AB|_{min}=f(\frac{\sqrt{2}}{2})=?$

题型三、已知极值最值问题求参数范围

例: $f(x)=x+\ln x$. $g(x)=x+1$. $y=a$ 与 $f(x)$. $g(x)$ 交于AB两点

$|AB|_{min}$



$$|AB|=x_2-x_1=x_2-(x_2+\ln x_2-1)$$

$$=-\ln x_2+1$$

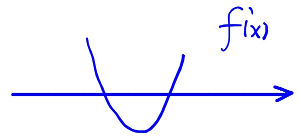
$$\begin{cases} x_2+\ln x_2=a \\ x_1+1=a \end{cases}$$

$$\therefore x_1=a-1=(x_2+\ln x_2-1)$$

21. 已知函数 $f(x)=x^3+mx^2+(m+6)x+1$ 存在极值，则实数 m 的取值范围为________.

作出

$$f'(x)=3x^2+2mx+m+6 \qquad \Delta>0$$



22. 已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有极值，试求 a 的取值范围

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}-a\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

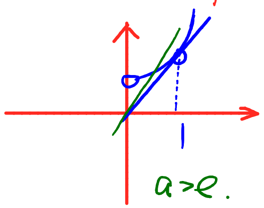
$$=\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2}-\frac{a(x-1)}{x}$$

$$=\frac{e^x\cdot(x-1)-ax\cdot(x-1)}{x^2}$$

$$=\frac{(x-1)\cdot(e^x-ax)}{x^2}$$

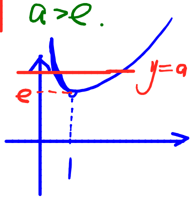
$$e^x-ax=0$$

法一: $e^x=ax$ 半分离



$a>e$.

法二: $\frac{e^x}{x}=a$



$a>e$

23. (2013 湖北文) 已知函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是

12T:

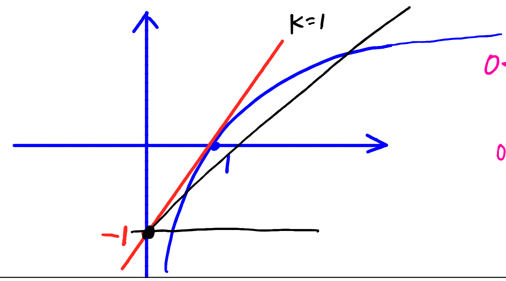
A. $(-\infty,0)$ B. $(0,\frac{1}{2})$ C. $(0,1)$ D. $(0,+\infty)$

$$f'(x)=\ln x-ax+x\cdot\left(\frac{1}{x}-a\right)$$

$$=\ln x-2ax+1=0$$ 有2个不等根 (变号零点)

$$\ln x=2ax-1 \qquad k=2a$$

转换成直线与曲线的交点



$0<2a<1$

$0<a<\frac{1}{2}$

相切时有0个极值点

24. 设函数 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}-k(\frac{2}{x}+\ln x)$（$k$ 为常数）

（II）若函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在两个极值点，求 k 的取值范围.

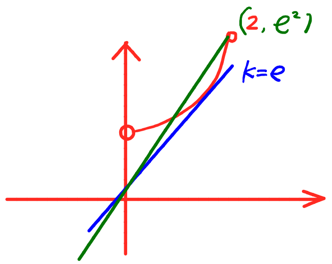
$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}-k\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{e^x\cdot(x-2)}{x^3}-k\cdot\frac{x-2}{x^2}$$

$$=\frac{e^x\cdot(x-2)-kx\cdot(x-2)}{x^3}$$

$$=\frac{(x-2)\cdot(e^x-kx)}{x^3}$$

$e^x=kx$



$e<k<\frac{e^2}{2}$.

25.若函数 $f(x)=(x-3)e^x-\frac{1}{3}kx^3+kx^2$ 只有一个极值点，则 k 的取值范围为______.

重根 ×

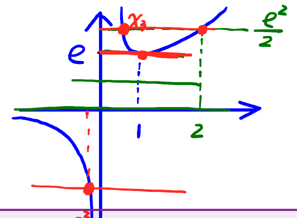
$$f'(x)=(x-2)e^x-kx^2+2kx$$

$$=(x-2)e^x-kx\cdot(x-2)$$

$$=(x-2)\cdot(e^x-kx)$$

$e^x=kx$

$\frac{e^x}{x}=k$



① $k<0$ 2个极值点, $x_1=2$, x_2 负

② $k=0$时 1个极值点 $x_1=2$

③ $0<k<e$时 1个极值点, $x=2$

④ $k=e$时 1个极值点 $x=2$

$\boxed{⑥\ k=\frac{e^2}{2}\ 1个极值点，x_2是极值点}$

⑤ $e<k<\frac{e^2}{2}$ 3个极值点

⑦ $k>\frac{e^2}{2}$. 3个极值点

26. 已知函数 $f(x)=ax-\ln x$ 的最小值为3，则实数 a 的值为 e^2.

$$f'(x_0)=a-\frac{1}{x_0}=0$$

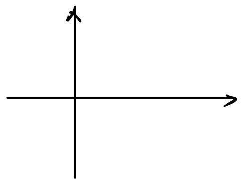
$$a=\frac{1}{x_0}\Rightarrow x_0=\frac{1}{a}$$

$$1-\ln\frac{1}{a}=3.$$

$$\ln\frac{1}{a}=-2.$$

$$\ln a=2.$$

$$a=e^2$$



27. 已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{2}ax^2-\ln(1+x)$.若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值是0，求 a 的取值范围.

$$f'(x)=1-ax-\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{1+x-ax-2ax^2-1}{1+x}$$

$$=\frac{-2ax^2-ax+x}{x+1}$$

$$=\frac{x(1-ax-a)}{x+1}\quad x\in(-1,+\infty)$$

$x+1>0$.

$x>0$.

$h(x_0)=1-2ax_0-2a=0$.

$2a(x_0+1)=1\Rightarrow x_0=\frac{1}{a}-1$

$$f(x_0)=\frac{1}{a}-1-\frac{1}{2}ax\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-\ln\frac{1}{a}$$